圓心角與圓周角

指導教授 ： 左台益、張永達、黃福坤、許瑛玿
設 計 者 ：劉翰臻老師　南門國中
曾明德老師　南門國中

中華民國 92 年 12 月

一、前言

1、設計理念：

由於人是視覺的動物，在人類的「形狀」或「幾何」直覺，是非常的豐富厚實，在數學課程來說典型的視覺影像處理—如直線、圖形的邊緣、平行與垂直、對稱、全等操作、放大縮小相似、圖形識別等，對人類大腦輕而易舉，卻是電腦處理的重大挑戰。因此，幾何不但是數學教育中的重要課題，而且也是較易學習、較有趣的教學單元。

推理能力的培養是國中數學教育的重點之一。國中階段的學習是以學生已有的幾何直覺經驗為前導，來強調主體或觀念的明確定義，及幾何量的代數運算。因此，學習的內容是由非形式化的推理逐漸提昇至形式化的推理。也就是由實驗歸納的推理方式進入推理幾何的證明課程。

在過去傳統圓這個單元比較偏重推理幾何，根據全國性的調查顯示：像比例推理、平面幾何證明，到了國三大約只有四成的學生能夠掌握，傳統國中幾何課程透過推理、證明的學習過程，培養學生數學邏輯、推理思考的能力。這樣的訓練，一直是傳統國中幾何課程所強調的重點，卻也是讓許多學生感到學習挫折，甚至放棄數學的關鍵點。

因此希望透過整合資訊融入的電腦教學策略，提高學生學習興趣，關於圓心角、圓周角與所對弧度的關係，對很多學生而言是屬於記憶方面的背誦，而並不是真正的理解，因此期望透過讓學生具體的操作測量結合 gsp 動態幾何的虛擬操作呈現，累積一定的經驗，避免一下子出現抽象的邏輯思維，使學生的認知發展能夠進入推理幾何層面，運用邏輯演繹去思考抽象問題。

2、模組特色：

(1)動態幾何教學：在幾何學習、教學與研究上，都應同時考慮兩個方向：認知的獲得（歸納法）,認知的發展（演繹法）。此二方向彼此互相連接，不能忽視任一方向。然而一般幾何學習限於時間、環境、工具使得在課程安排上以演繹證明方式宣告幾何性質，而忽略了經由觀察、測試、實驗等歸納方式獲得幾何性質。因此本模組以電腦作為幾何輔助教學工具，不僅是簡單地呈現幾何圖形學生更可以經由動態幾何圖形的變換及度量來描述他們所發現的一些幾何關係，增強開放式的猜測與研究。

(2) 實作結合虛擬操作：由於本模組主題是資訊融入教學，因此在課程設計上主要是以 power point 為講解大綱，gsp 動態幾何操作為主要概念發展，但是這都只是虛擬操作，以 Van Hiele 的幾何學習發展理論來說一個人幾何概念思考模式可以分成五個發展層次，第 0 層次——視覺期（Visualization）、第一層次——分析期（Analysis）、第二層次——關係期（Relation）或非形式演繹期(Informal Deduction)、第三層次——形式演繹期（Formal Deduction）、第四層次——嚴密性（Rigor）或公理性（Axiomatic）每個層次有其發展特徵，所以本模組設計是以具體的操作測量，進而透過電腦的虛擬操作，方能提升學生的幾何思考層次，同時也避免造成為運用資訊而用電腦的迷思想法。

因此在概念發展活動開始時，讓學生實際的使用量角器去測量角度，再透過生活中常見的時鐘為增強物，運用 gsp 動態幾何的方式出發以建立角度概念，作向下的概念發展，期望學生在這樣的教學流程中，由具體操作情境進入推理幾何情境中，最終目標是學會推理幾何證明，學習內容採漸進式安排，由基本幾何概念進入較深入的幾何推理領域中。

(3)讓學生擁有探索推理的感受：一個概念的發展是由一個個教學活動環環相扣發展的，在進入下一個教學活動時，老師可善用發問問題的方式，以造成懸疑的感覺，讓學生有探索的動機以維持學習興趣，因此本模組的教學活動，是以嚴謹的方式，讓學生一步一步的去探索，運用邏輯推理思考，去尋求答案。

二、單元名稱：圓心角與圓周角

教學對象：國中三年級

教材來源：國立編譯館出版之國中數學第五冊及教師手冊

時間分配：本單元預計上二至三堂課，每節課 45 分鐘

三、 學習本單元所具備的預備知識

(1)能操作量角器求角的度數。

(2)知道圓面積、圓周長、扇形面積、扇形弧長的求法。

(3)知道三角形的外角定理。

四、單元教學目標

(1)知道圓心角、圓周角的意義。

(2)知道弧的度數等於所對圓心角的度數。

(3)知道一弧所對圓周角的度數是此弧所對圓心角度數的一半。
(4)知道一弧所對圓周角的度數是此弧度數的一半。
(5)知道半圓內的圓周角都是直角。
(6)能做圓心角與圓周角的簡單應用。

五、符合九年一貫能力指標

1、根據九年一貫課程數學學習領域暫行綱要(教育部，2002)

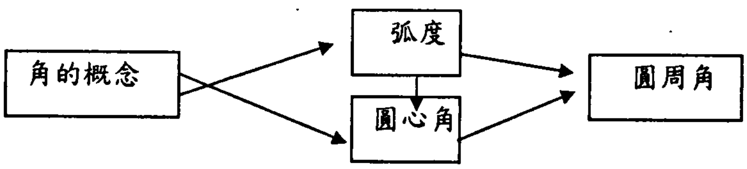
(1) $\boxed{\text{S－3－10 能透過實驗辨識三角形、四邊形、圓的性質}}$
說明：本設計部份內容乃透過實驗辨識圓的性質， 亦可在七年級實驗幾何課程中進行。

(2) $\boxed{\text{S－4－1 能根據給定的性質做局部的推理}}$
說明：能依據圓的性質做局部的推理。

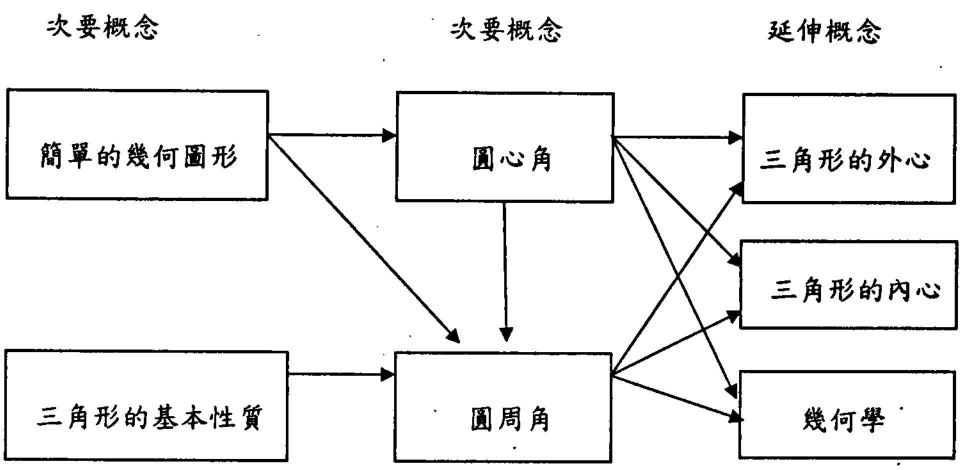
2、 根據九年一貫課程數學學習領域課程綱要(教育部，2003)

(1) $\boxed{\text{9－S－07 能理解圓的相關性質（S－4－14）}}$
說明：能理解圓心角、圓周角定義。

六、教材內容分析



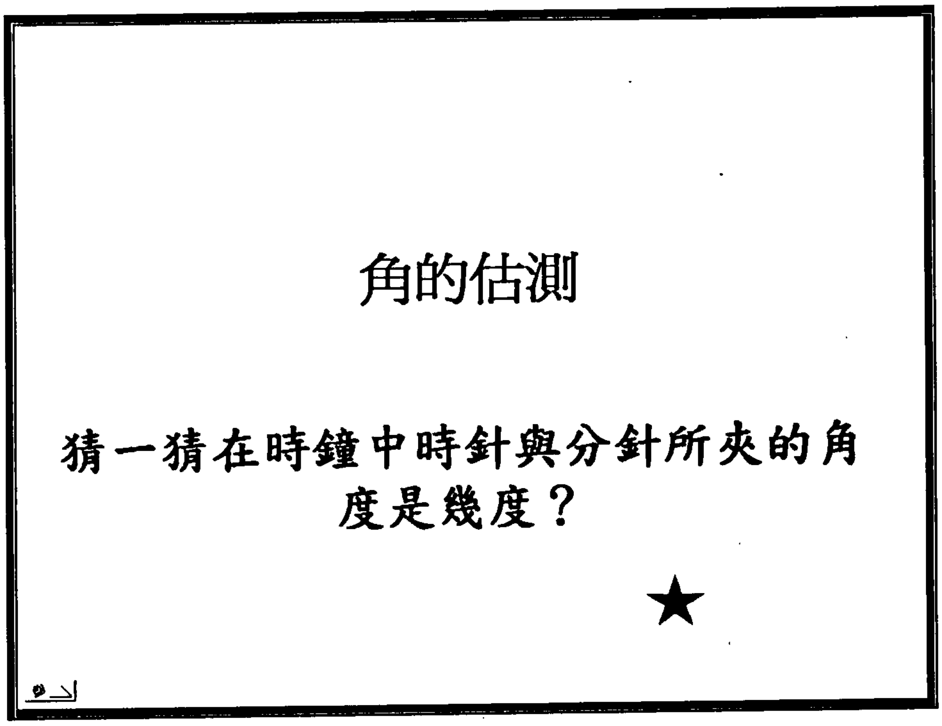
七、教材地位分析



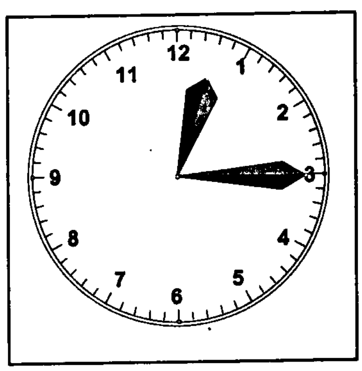
八、教學流程與注意事項

活動一、$\boxed{\text{角的估測}}$：導入活動

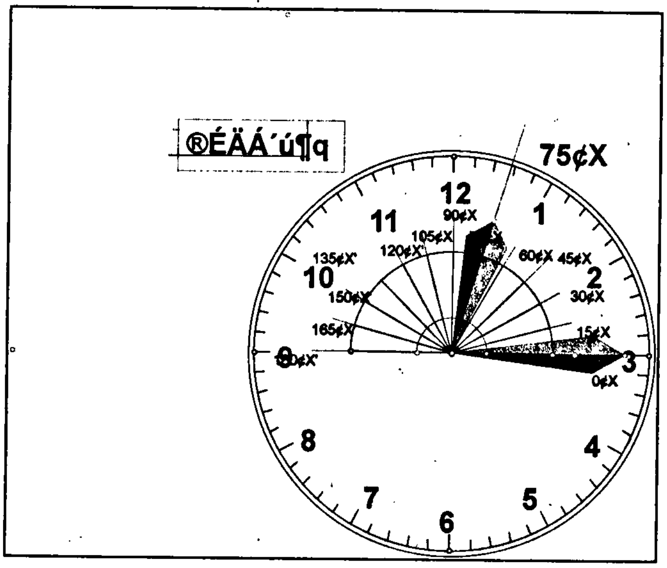
打開 power point 檔（活動一），以下是 power point 畫面



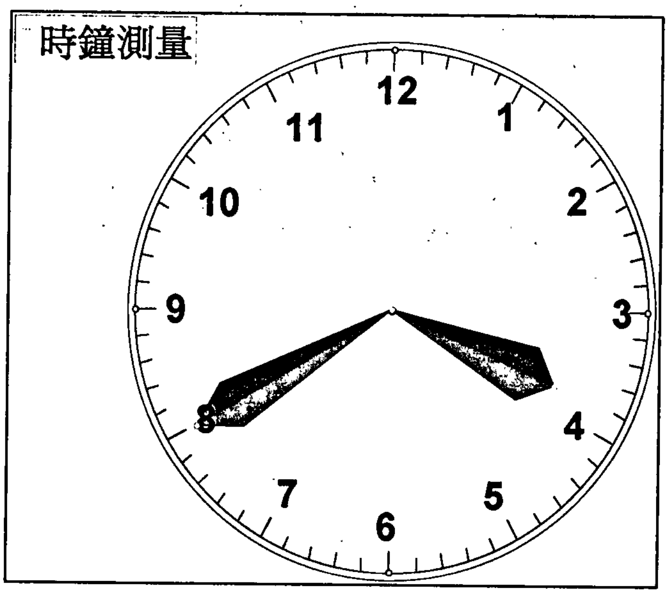
點下星星，連結至 gsp 檔案，即會出現下列時鐘畫面



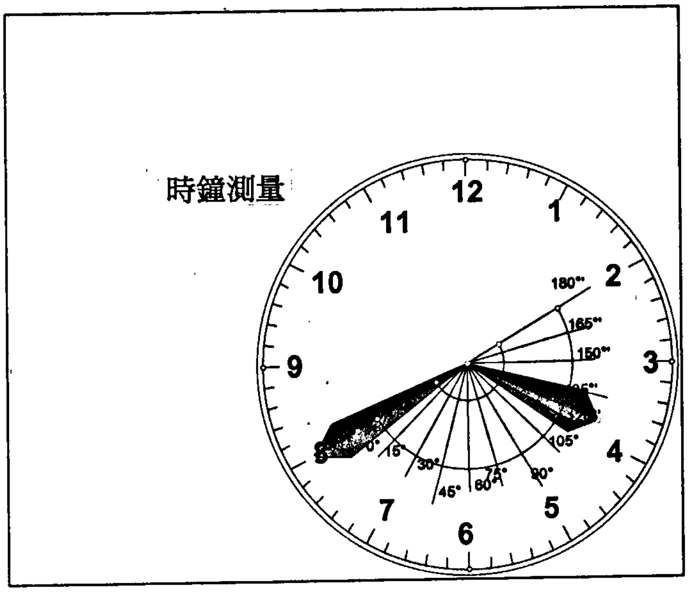
活動一【說明】：以 gsp『時鐘畫面』，如上圖，任意移動時針和分針，讓學生猜測時針和分針所夾的角度是幾度？



【說明】接著利用 gsp 量角器功能虛擬操作測量時針和分針所夾的角度，從畫面上學生可得知是 75 度。



【說明】再次任意移動時針和分針，讓學生猜測時針和分針所夾的角度是幾度？



【說明】利用 gsp 量角器功能虛擬操作測量時針和分針所夾的角度，從畫面上學生可得知是 120 度。

重複多次測量活動後，詢問學生猜中的訣竅(預期學生會出現一些非正式的語言來描述一些數學性質)或是詢問學生為什麼誤差那麼多的原因與感想(預期學生會訝異並且感受使用工具的重要性)。

活動二、角的實際量測 ：由量角器引出圓心角與所對的弧的關係

（1）角的實際測量：發下學習單，讓學生實際測量各種不同的角度，包括 90 度、75 度、120 度與 180 度，從具體的操作測量中，提示學生測量一個角時，是以角的頂點對準量角器的圓心的。

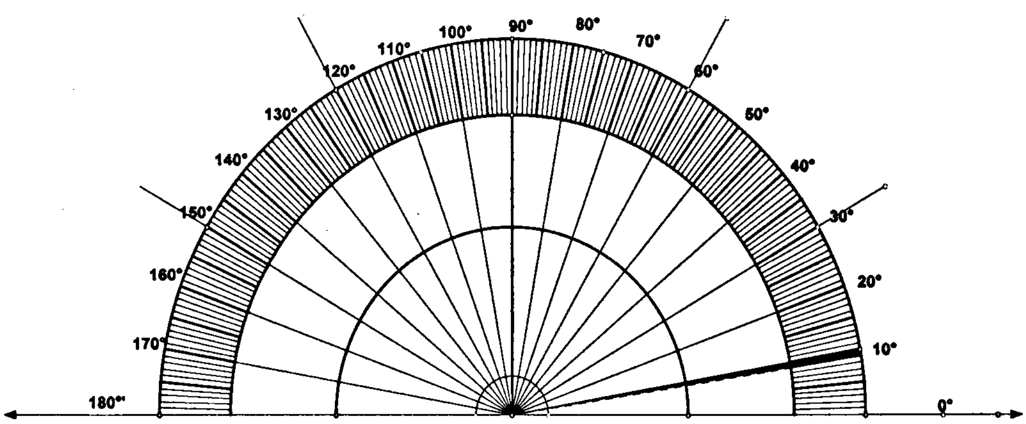
打開 power point 檔（活動二），以下是 power point 畫面

活動二 角的實測

從角的測量活動中，你(妳)發現了什麼？

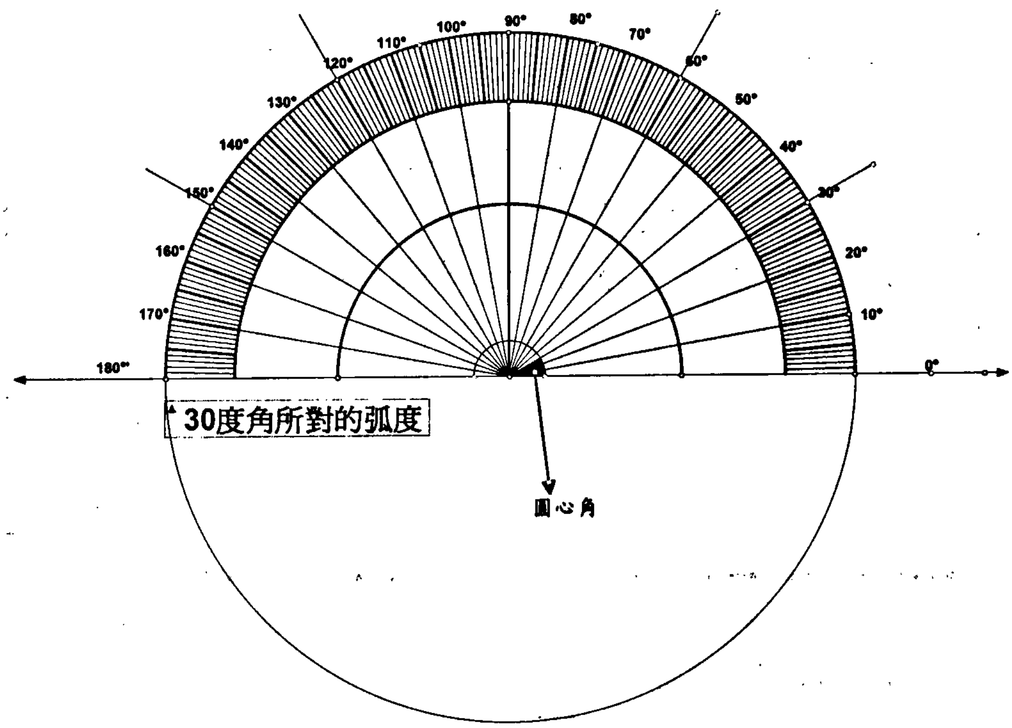
觀察量角器，我們可以看到從0到180度的小刻度，把量角器這個半圓分成180等分，其中每一等份的弧所對的角是一度。

點下量角器，連結至 gsp 檔案，即會出現下列量角器畫面。



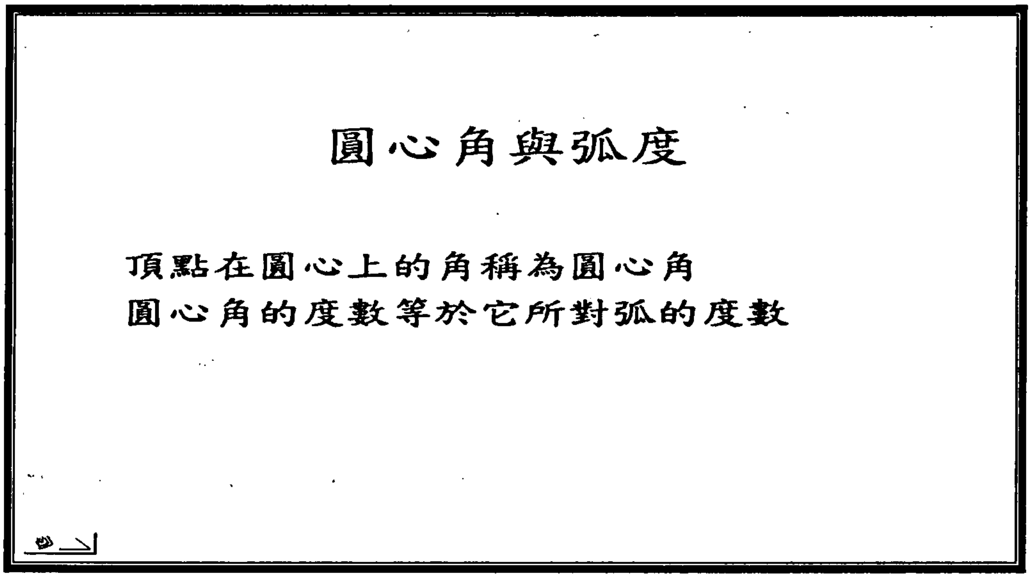
每一等份的弧所對的角是一度

(2) 角與弧度：進入虛擬操作 gsp『量角器』畫面，如上圖，讓學生觀察量角器是由從 0 到 180 度的小刻度，把量角器這個半圓分成 180 等分，其中每一等份的弧所對的角是一度。每個角都對應著一個弧，角的度數就是弧的度數，例如 30 度的角所對的弧度就是 30 度，並且告訴學生其實量角器是由很多個角所構成的。

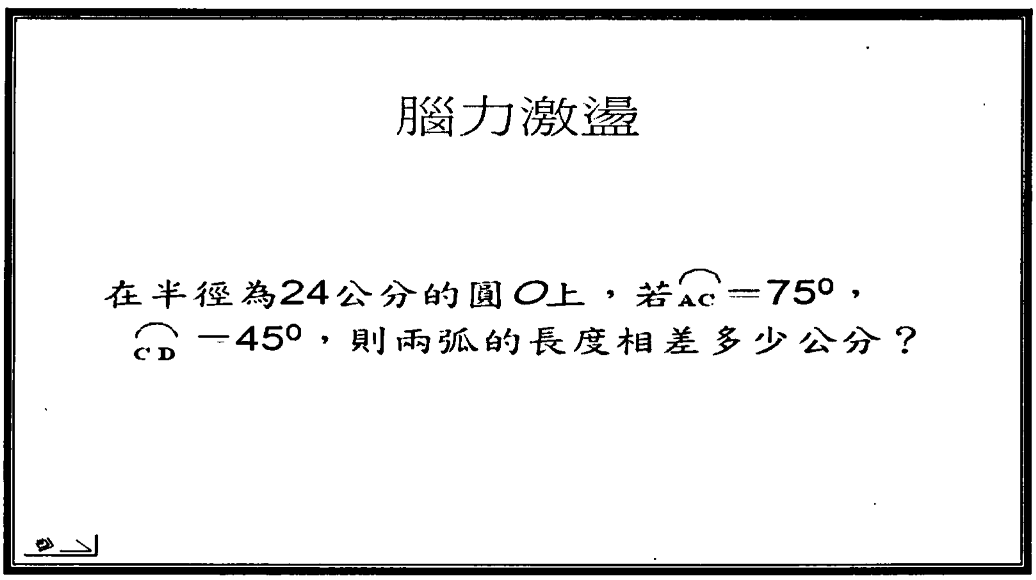


(3) 圓心角概念：接著將量角器隱藏的半圓秀出，再讓學生觀察在 gsp 量角器畫面 30 度的角，它的頂點位於量角器的圓心上，我們稱頂點在圓心上的角為圓心角，圓心角的度數等於它所對弧的度數。

作出結論：打開 power point 檔，以下是 power point 畫面

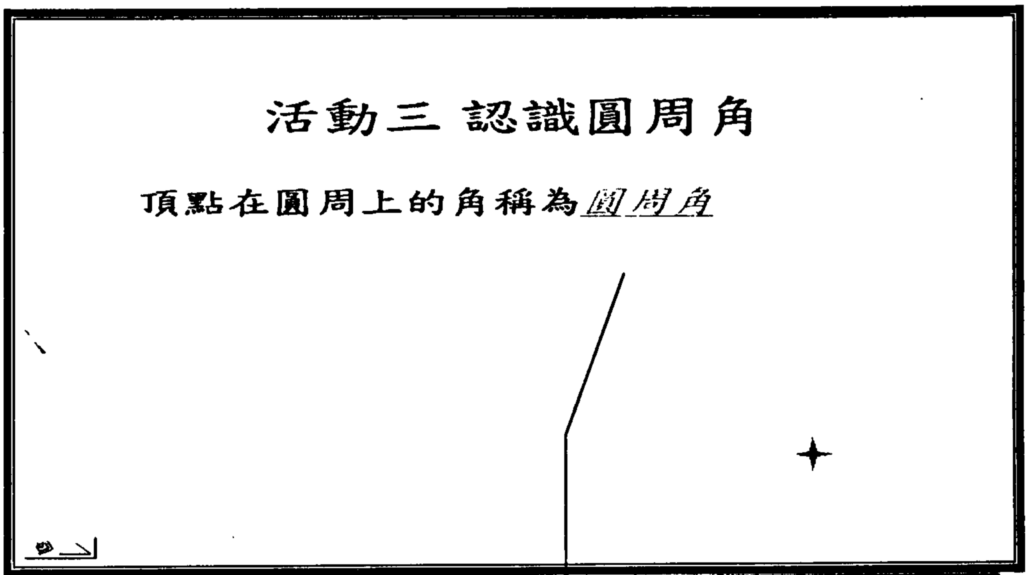


【隨堂練習】打開 power point 檔，以下是 power point 畫面

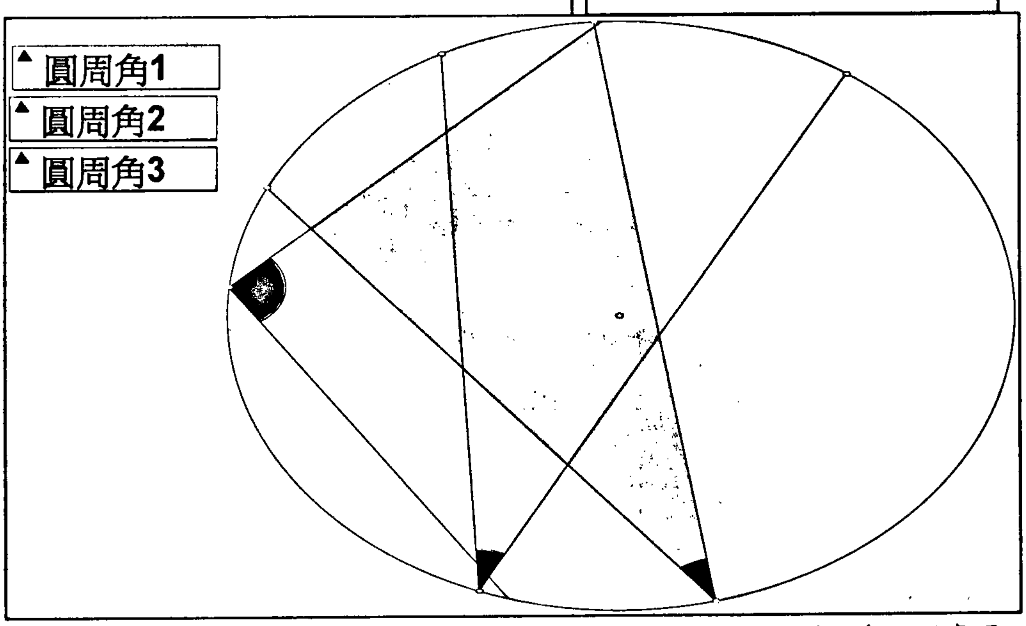


活動三、認識圓周角：發展活動

打開 power point 檔（活動三），以下是 power point 畫面



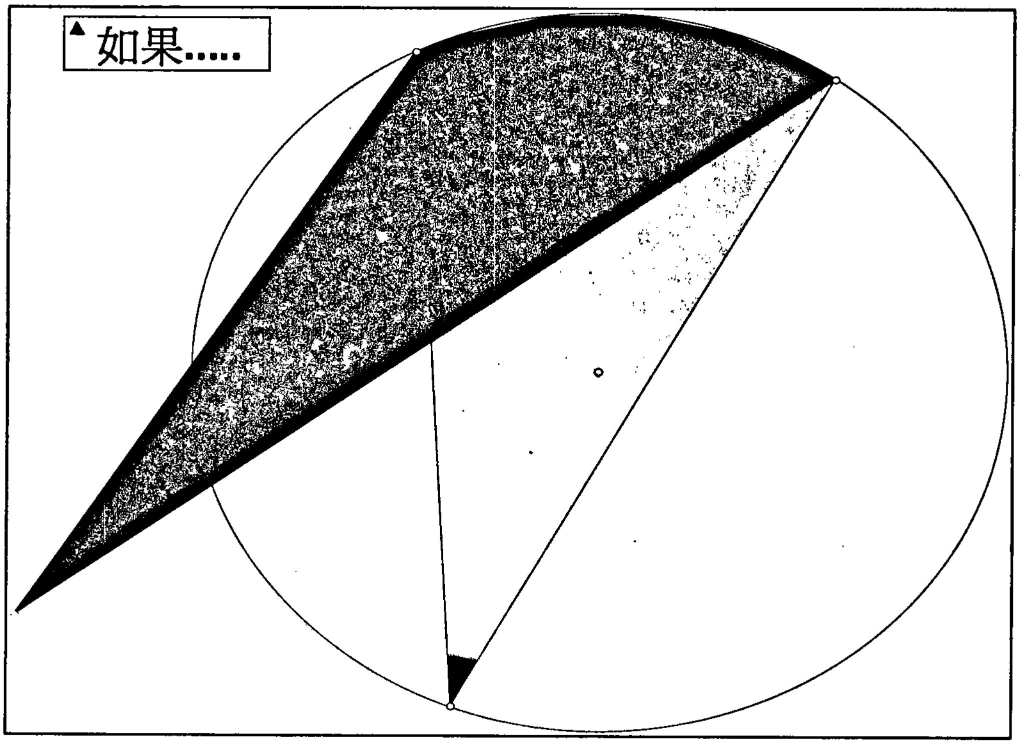
點下圓周角，連結至 gsp 畫面，即會出現下列三組圓周角畫面。



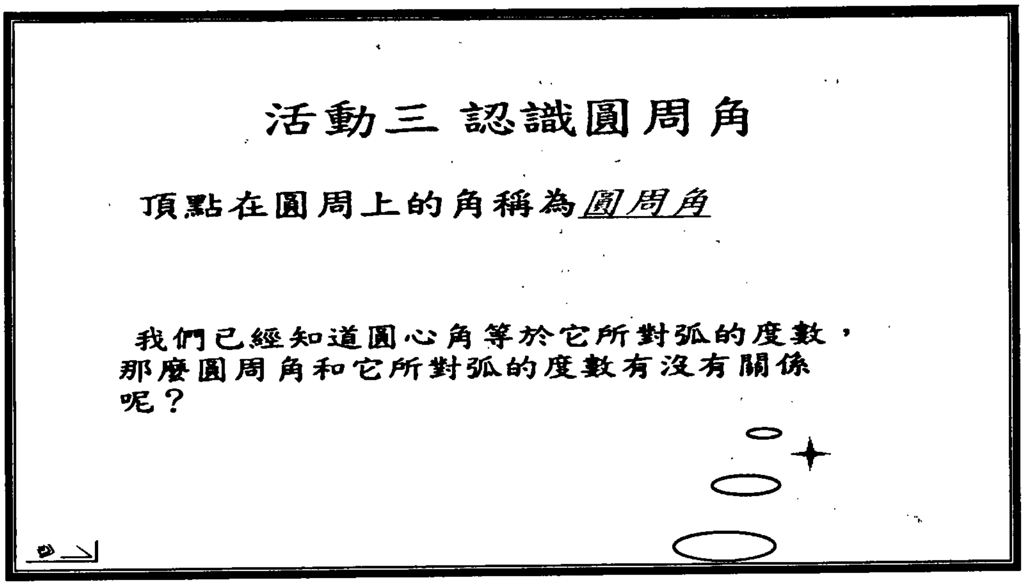
(1)認識圓周角：隨著頂點在圓上位置的不同，學生已經認識了圓心角，那麼頂點在圓周上的角就稱為圓周角或是圓上角，進入 gsp『圓周角』畫面，如上圖，秀出三種不同的圓周角，學生可觀察出這三種圓周角的頂點皆是在圓周上。

接著點下 gsp 畫面『如果』

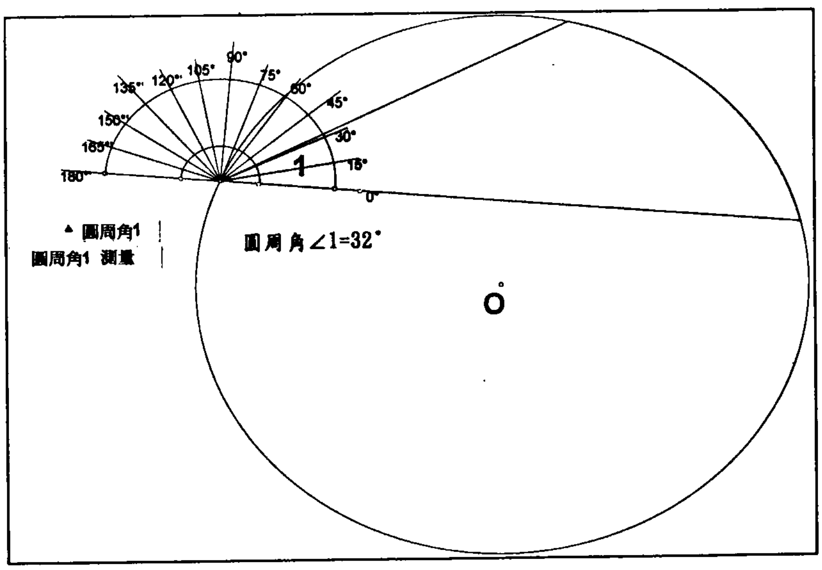
詢問學生畫面上紅色的角是不是圓周角，造成衝突，讓學生清楚圓周角的定義。



打開 power point 檔（活動三），以下是 power point 畫面



點下星星，連結至 gsp 檔案，即會出現下列畫面

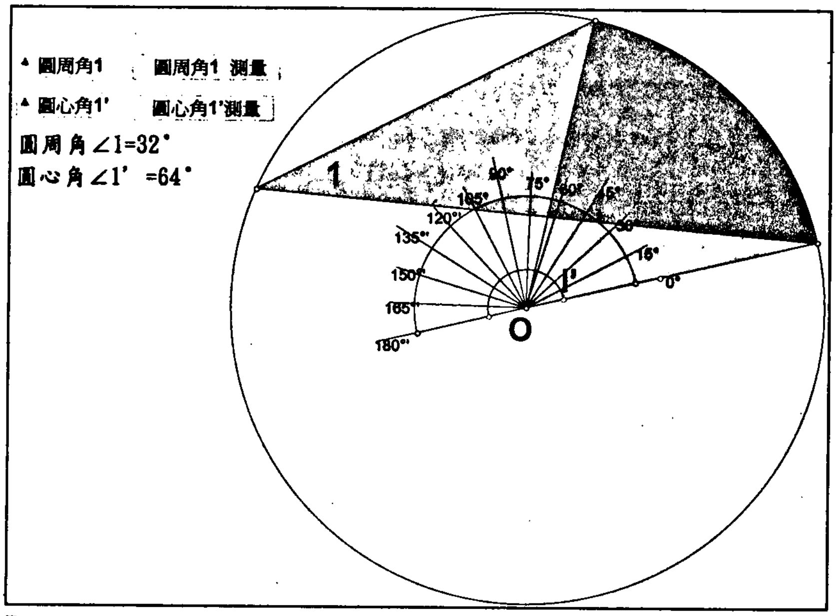


(2)圓周角與圓心角與所對的弧的關係：進入實驗幾何階段

我們已經知道圓心角等於它所對弧的度數，那麼圓周角和它所對弧的度數有沒有關係呢？進入 gsp『三組圓心角與圓周角畫面』，如上圖，首先秀出第一個圓周角，詢問學生要如何知道此圓周角所對弧的度數？

接著點下 gsp 畫面

第一組圓心角與圓周角

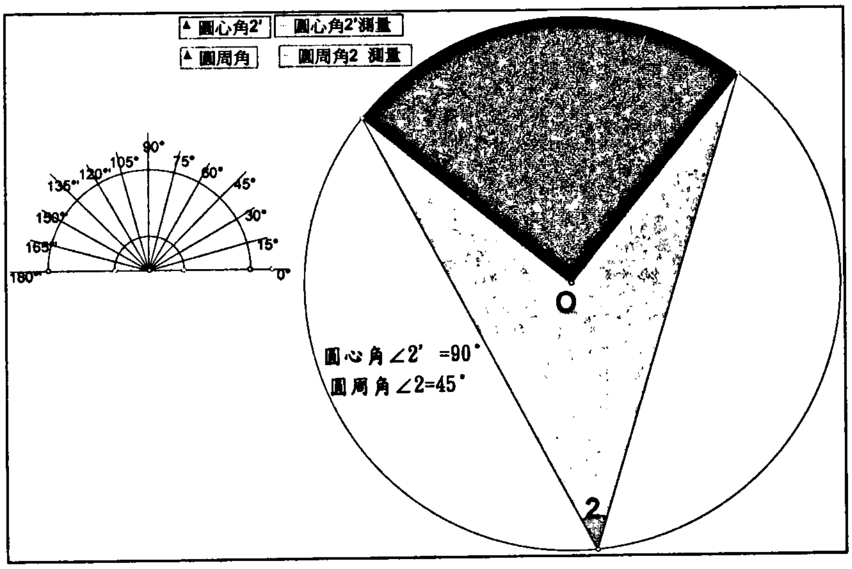


【說明】

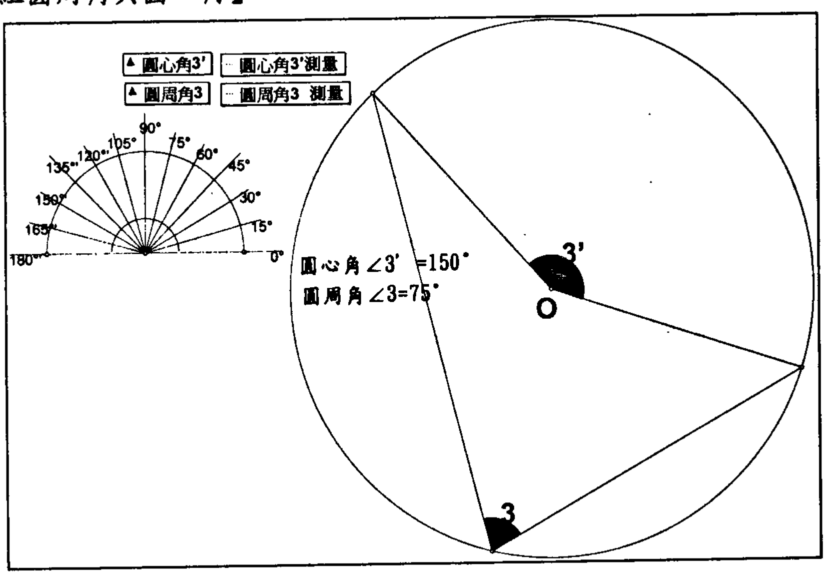
秀出與此圓周角所對同一個弧的圓心角，利用量角器分別測量此圓心角和圓周角的度數，讓學生發現其兩倍關係。

再讓學生看第二組與第三組圓周角與圓心角，加深學生感受。

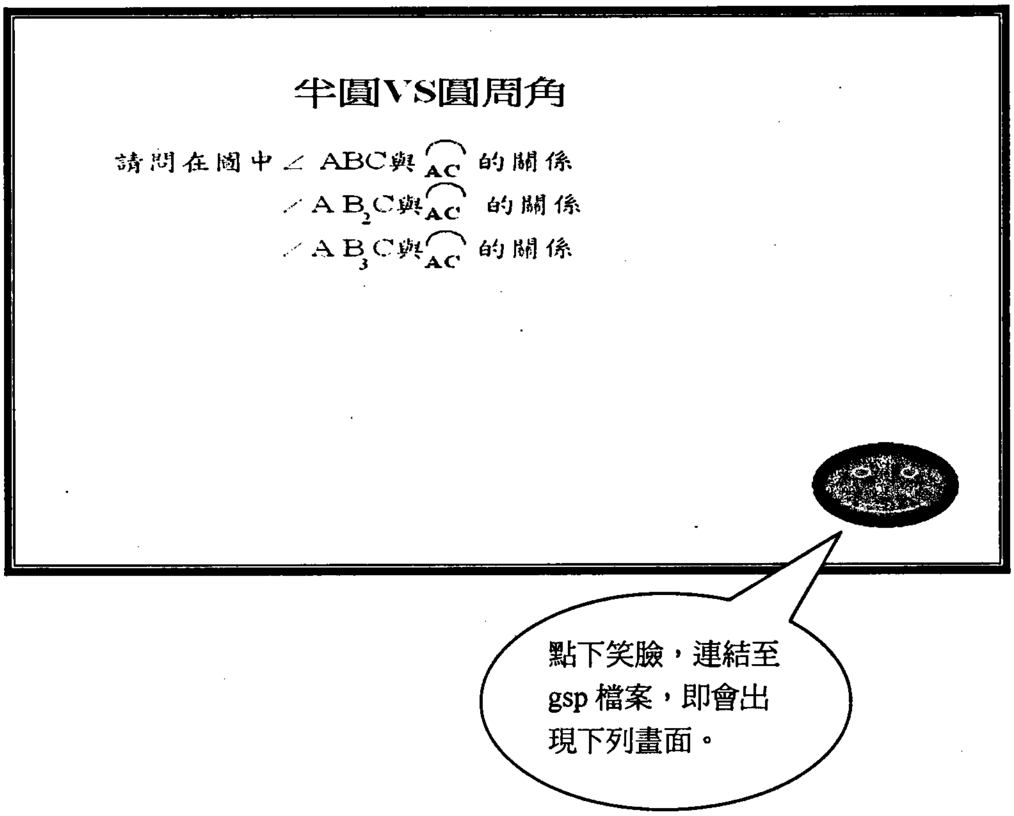
【第二組圓周角與圓心角】



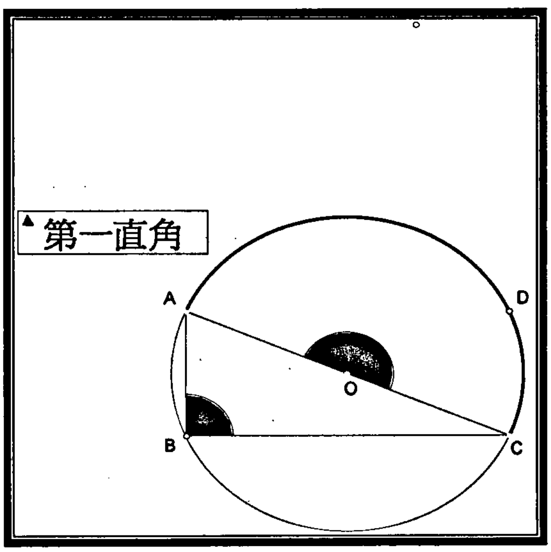
【第三組圓周角與圓心角】

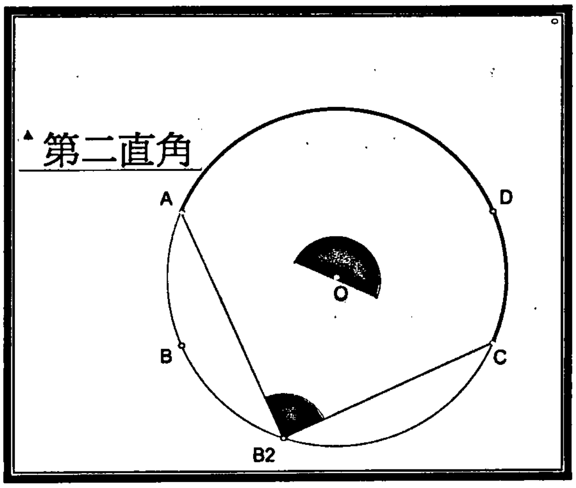


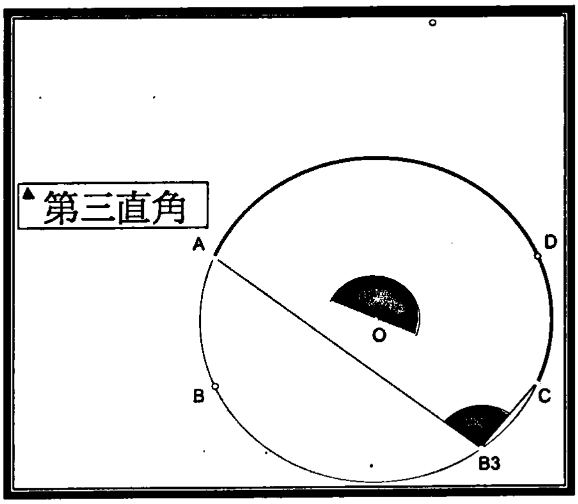
打開 power point 檔，以下是 power point 畫面



【說明】在 gsp 畫面中學生可看到三組半圓上的圓周角，它們都對著同一個圓弧在老師提示之下，學生可觀察出圓周角角度和圓弧之間度數的關係。







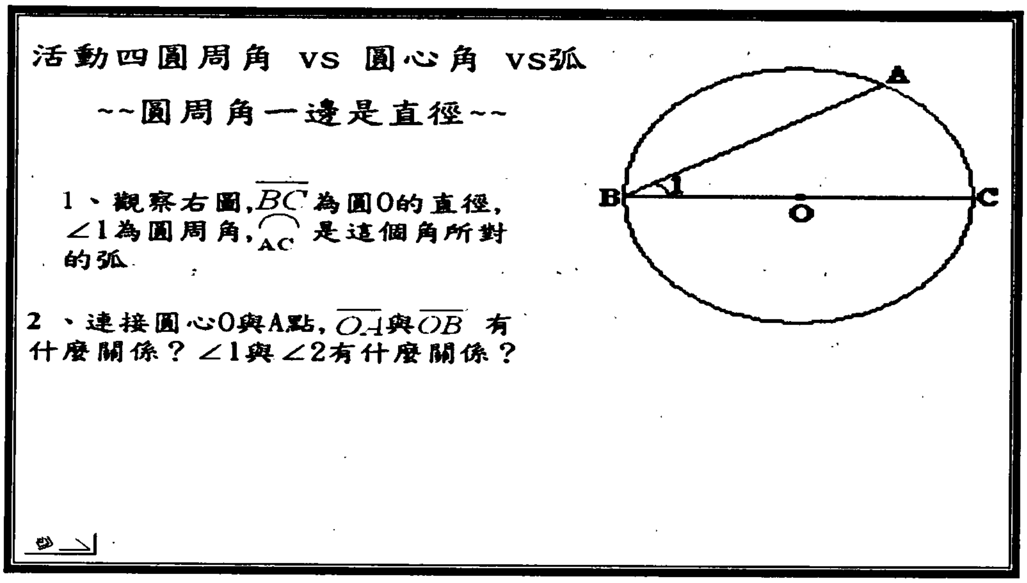
(3)半圓和圓周角：

在國編版第五冊2-2教材安排順序中，將半圓與圓周角作為圓周角與圓心角概念的再加強，而在本模組中，刻意顛倒此兩者順序，以半圓上的圓周角特例出發，當學生透過虛擬操作測量圓周角與圓心角之後，讓學生觀察gsp畫面如上圖，半圓上所對的角都是圓周角，圓周角都是直角而對應的半圓弧是180度，恰好也是兩倍關係，此活動亦是由實驗幾何進入推理幾何的過渡階段，讓學生在虛擬操作中一步一步去建立圓心角與圓周角關係的認知基模，以進入推理幾何的證明階段。

活動四：**探索圓心角、圓周角與所對弧度數的關係**

本活動利用已知圓心角度數等於所對弧的度數，在活動中半引導半推理的逐步達成所要的結果，特別的是，運用 power point 的動畫效果呈現證明中輔助線的出現，更可以加深學生的印象，一方面可以幫助學生訓練推理，一方面可以提供機會給學生討論、師生互動，最後在探索活動中發現圓心角、圓周角與所對弧的關係。

打開 power point 檔(活動四)，以下是 power point 畫面



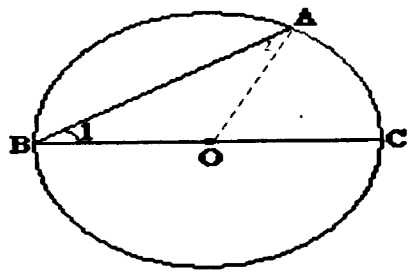
【說明】

圓周角可分為下列三類型：

型一：圓周角的一邊是直徑，如上圖，進入推理幾何階段，詢問學生該如何證明？

活動四圓周角 vs 圓心角 vs弧

~~圓周角一邊是直徑~~



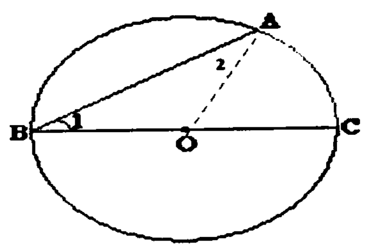
1、觀察右圖，$\overline{BC}$為圓O的直徑，$\angle 1$為圓周角，$\overset{\frown}{AC}$ 是這個角所對的弧

2、連接圓心O與A點，$\overline{OA}$與$\overline{OB}$ 有什麼關係？$\angle 1$與$\angle 2$有什麼關係？

$\overline{OA}$ 與$\overline{OB}$都是圓的半徑，所以 $\angle 1=\angle 2$

圓周角 vs 圓心角 vs 弧

~~圓周角一邊是直徑~~



3、觀察$\angle AOC$是哪個三角形的外角？$\angle 1$與$\angle AOC$的度數有什麼關係

☆ 由三角形外角定理，$\angle AOC$是△ ABO的外角，所以 $\angle AOC=\angle 1+\angle 2=2\angle 1$

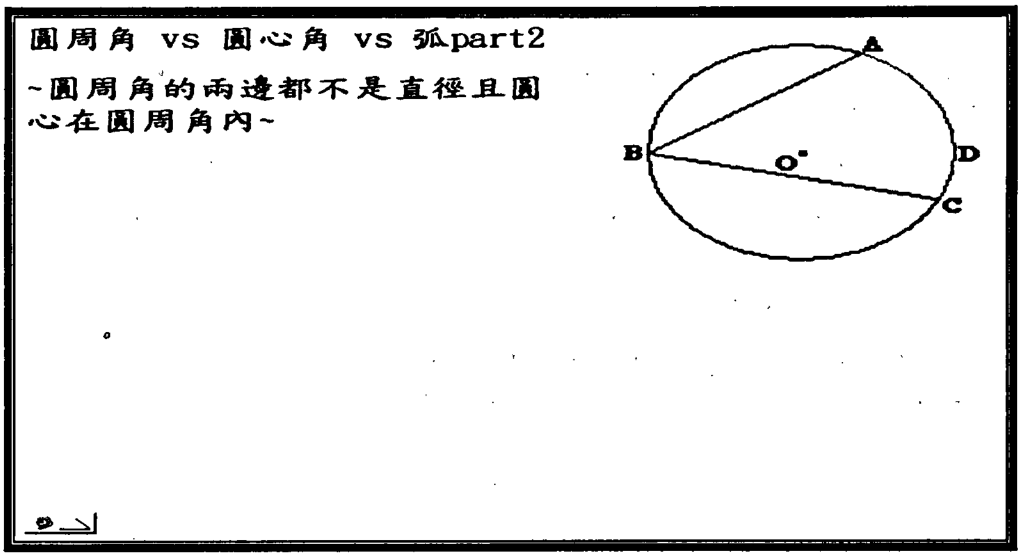
4、已知道圓心角AOC等於兩倍一邊爲直徑的圓周角$\angle 1$，比較$\angle 1$和 $\overset{\frown}{AC}$的關係

☆ 因爲圓心角的度數等於所對的弧，所以$\angle AOC$的度數等於 $\overset{\frown}{AC}$ 的度數

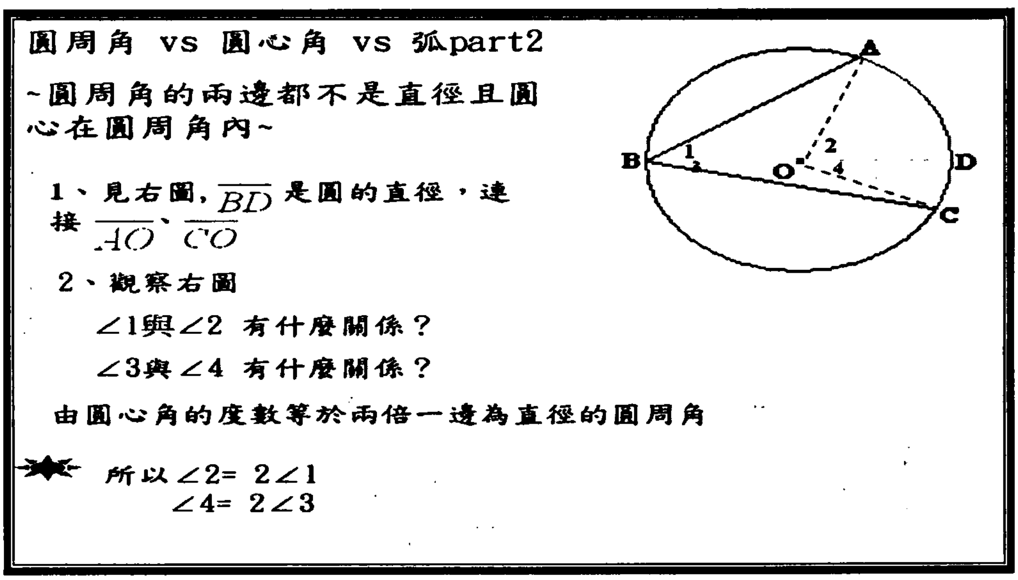
又因爲$\angle AOC=2\angle 1$，所以圓周角$\angle 1$的度數就等於 $\overset{\frown}{AC}$ 的一半

【說明】連接$\overline{OA}$，此處利用 power point 動畫效果，顯示輔助線，加深學生印象，運用三角形外角定理，證明一邊是直徑的圓周角度數是所對同弧圓心角度數的一半，再利用圓心角度數等於所對的圓弧度數，所以圓心角度數亦是所對圓弧度數的一半。

打開 power point 檔，以下是 power point 畫面

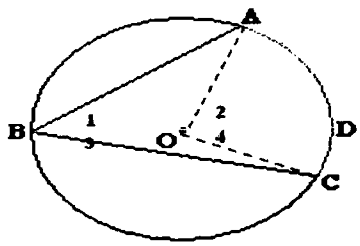


【說明】：型二：圓周角的一邊不是直徑，圓心在圓周角內，
畫面出現這樣的圓周角，詢問學生該怎麼證明呢？
造成懸疑的效果，讓學生試著運用已知：一邊是直徑的圓周角度數是所對同弧圓心角的一半，亦是所對弧度數的一半，出發去證明。因此利用 power point 動畫效果，顯示輔助線連接 $\overline{AO}$ 、$\overline{CO}$，及秀出直徑 $\overline{BD}$ 開始證明推理。



圓周角 vs 圓心角 vs 弧

~圓周角的兩邊都不是直徑且圓心在圓周角內~



3、∠ABC與∠AOC有什麼關係?

因爲 $\angle AOC = \angle 2 + \angle 4$
$= 2\angle 1 + 2\angle 3$
$= 2(\angle 1 + \angle 3)$
$= 2\angle ABC$

4、∠ABC的度數與 $\overset{\frown}{AC}$ 的度數有什麼關係?

因為∠AOC的度數等於 $\overset{\frown}{AC}$ 所對的度數

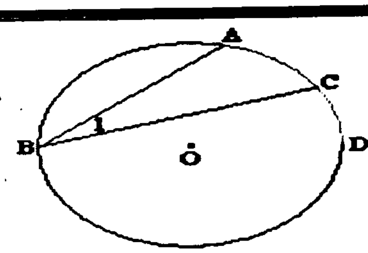
又∠AOC= 2∠ABC,

所以 $\overset{\frown}{AC}$ 所對的度數等於2∠ABC

打開 power point 檔，以下是 power point 畫面

圓周角 vs 圓心角 vs 弧

圓周角的兩邊都不是直徑且圓心不在圓周角內

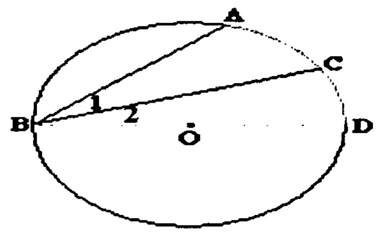


【說明】

型三：圓周角的一邊不是直徑，圓心不在圓周角內，如上圖畫面出現這樣的圓周角，詢問學生該怎麼證明呢？

圓周角 vs 圓心角 vs 弧

圓周角的兩邊都不是直徑且圓心不在圓周角內



1、見右圖，過B作圓O的直徑，交一圓於另一點D

2、請問∠ABD與$\overset{\frown}{ACD}$有什麼關係?

∠CBD與$\overset{\frown}{CD}$有什麼關係?

$\angle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ACD}$

$\angle CBD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$

仍是運用已知：一邊是直徑的圓周角度數是所對同弧圓心角的一半，亦是所對弧度數的一半出發去證明。因此運用 power point 動畫效果作輔助線連接$\overline{BD}$，開始證明。

作出結論：打開 power point 檔，以下是 power point 畫面

圓周角與圓心角

一弧所對圓周角的度數，是此弧度數的一半。

一弧所對圓周角的度數是它所對圓心角度數的一半

半圓所對的圓周角都是直角

【隨堂練習】打開 power point 檔，以下是 power point 畫面

> 動動腦時間
>
> 圓內接三角形ABC，若∠A=45°，∠C=60°
> 則$\overset{\frown}{AC}$=??

九、教學活動（教案）

教師活動	學生活動	評量提示與注意事項
1、導入活動 角的估測：提出問題 (1)在時鐘畫面中，任意移動時針和分針，讓學生猜測時針和分針所夾的角度是幾度？ (2)詢問學生猜中的訣竅是什麼，沒有猜中的原因與感想。	學生回答	
1、角的實際測量：	學生分享心得感想	
(1)發下學習單，讓學生實際測量各種不同的角度，包括 90 度、75 度、120 度與 180 度，提示學生測量一個角時，是以角的頂點對準量角器的圓心的。	學生實際測量	
(2)觀察量角器由從 0 到 180 度的小刻度，把量角器這個半圓分成 180 等分，其中每一等份的弧所對的角是一度。每個角		

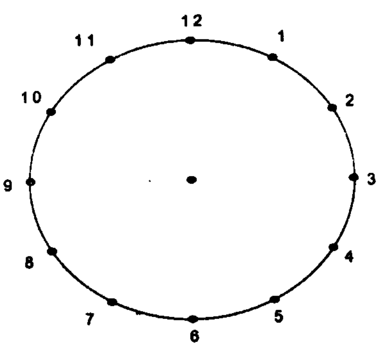
都對應一個弧，角的度數就是弧的度數，例如 30 度的角所對的弧度就是 30 度，其實量角器是由很多個角所構成的。 (3)說明兩條半徑交點在圓心所成的夾角稱為圓心角，圓心角的度數等於它所對弧的度數。	學生聆聽	
隨堂練習：在半徑為 24 公分的圓 O 上，若 $\overset{\frown}{AB}=75^0$，$\overset{\frown}{CD}=45^0$，則兩弧的長度相差多少公分？	學生練習	
2、認識圓周角 (1)提出問題：頂點在圓心上的角叫做圓心角，那麼頂點在圓周上的角叫做什麼呢？		
(2)進入 gsp 畫面秀出不同的圓周角，並且詢問如果是這樣的角是不是圓周角呢？	圓周角	
(3) 我們已經知道圓心角等於它所對弧的度數，那麼圓周角和它所對弧的度數有沒有關係呢？ 進入 gsp『三組圓心角與圓周角畫面』 提出問題：該如何測量畫面中的圓周角？ (4)先測量畫面中的圓周角度數，接著秀出對同一弧的圓心角，並測量之，第二、三組圓周角圓心角也是一樣重複第一組的測量 (5)半圓與圓周角： 畫面中的圓周角都是直角，所對應的弧是半圓，那麼直角與半圓度數間的關係是什麼呢？？	否	學生可發現圓心角與圓周角似乎存在著兩倍關係
3、探索活動：圓心角、圓周角與		

所對弧度數的關係 觀看 power point 畫面有三種類型的圓周角，請按照畫面中的步驟回答老師的問題。 4、結論： 一弧所對圓周角的度數是它所對圓心角度數的一半。 一弧所對圓周角的度數是此弧度的一半。 隨堂練習：圓內接三角形 ABC，若 $\angle A=45^{\circ}$，$\angle C=60^{\circ}$則$\widehat{AC}$ =??	學生按照問題一步驟一步驟的回答問題 第二、三種類型的圓周角也是如此 學生練習	學生可發現在半圓上的圓周角都是直角，對應的半圓弧是 180 度，似乎也存在著兩倍關係 活動分成三部分，在討論過程中，老師可機動的從學生回答問題中觀察學生的反應

十、教學評量　　動動腦時間到囉！！

1、(1)從三點整到三點二十四分時，分針掃過的角度是幾度？

(2)若時鐘分針長 5 公分，從 3 點整到 3 點 24 分間，分針掃過的扇形面積為多少？



解答：

(1)一圈 360°，一共有 12 大格，所以一大格 30°

一大格分為 5 小格，所以 1 小格 6°

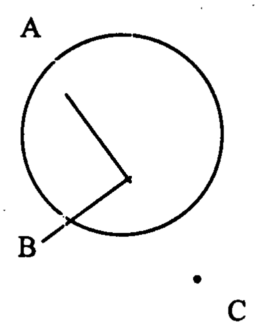
三點二十四分時，分針掃過的角度：$4 \times 30^\circ + 4 \times 6^\circ = 144^\circ$

(2)從 3 點整到 3 點 24 分間，分針掃過的扇形面積為：

$5 \times 5 \times \pi \times \frac{144}{360} = 10\pi$ (平方公分)

2、若已知 A、B 兩點將圓 O 分成 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{ACB}$，且 $\overset{\frown}{ACB}$ 度數比 $\overset{\frown}{AB}$ 度數的 3 倍少 20^0，

則 $\angle AOB=$



解答：設 $\overset{\frown}{AB} = X^\circ$ $\overset{\frown}{ACB} = 3x^\circ - 20^\circ$

$X + 3x - 20 = 360$

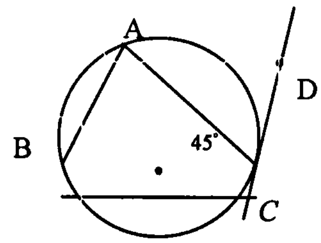
$X = 95$

$\overset{\frown}{AB} = 95^\circ$

$\angle AOB = 95^\circ$

3、如右圖，$\overline{CD}$ 切圓 O 於 C，$\angle ACB = 45^\circ$，$\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC} = 10^\circ$，

請問 $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} = ?$



解答：$\angle ACB = 45^\circ$

$\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$

$\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC} = 10^\circ$

$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

則 $\overset{\frown}{AC} = 140^\circ$

$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} = 140^\circ + 90^\circ = 230^\circ$

4、A、B、C、D 四點依次在圓 O 上，若 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{AD} = 2:2:3:5$，則 $\angle BAD$ ＝ ____________

解答：$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{AD} = 2:2:3:5$

$2r + 2r + 3r + 5r = 360^\circ$

$12\,r = 360^\circ$

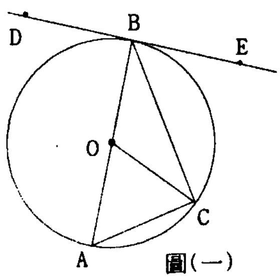
$r = 30^\circ$

$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$，$\overset{\frown}{BC} = 60^\circ$，$\overset{\frown}{CD} = 90^\circ$，$\overset{\frown}{AD} = 100^\circ$

弧 $BCD = + \overset{\frown}{CD} = 150^\circ$

$\angle BAD = 75^\circ$

5、如右圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，C 為圓 O 上一點，若 $\angle ABC = 32^0$，則 $\angle BAC$ ＝ ____________



圖(一)

解答：$\angle BCA = 90^\circ$

(因為 $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，$\angle BCA$ 是半圓所對的圓周角)

$\angle BAC = 180 - 90 - 32 = 58^\circ$